Mathematical Methods for Physics

作业：0.1
思考与提高 0.1
期中 0.2
期末 0.6

- 1.1. 复数与复数运算
    1. 1.1.1. 复数的基本概念
    2. 1.1.2. 运算
- 1.2. 复变函数
    1. 1.2.1. 定义
    2. 1.2.2. 区域
    3. 1.2.3. 复变函数举例
- 1.3. 导数
    1. 1.3.1. 柯西黎曼条件
- 1.4. 解析函数
- 1.5. 平面标量场*
- 1.6. 多值函数*
- 2.1. 复变函数的积分
- 2.2. 柯西定理
- 2.3. 不定积分
- 2.4. 柯西公式
- 3.1. 复数项级数
- 3.2. 幂级数
- 3.3. 泰勒级数展开
- 3.4. 解析延拓*
- 3.5. 洛朗级数展开
- 3.6. 孤立奇点的分类
- 4.1. 留数定理
- 4.2. 留数定理计算实变函数定积分
- 5.1. 傅里叶级数
- 5.2. 傅里叶积分与傅里叶变换
    1. 5.2.1. 实数形式的傅里叶变换
    2. 5.2.2. 复数形式的傅里叶积分
    3. 5.2.3. 傅里叶变换的基本性质

    4. 5.2.4. 多重傅里叶积分
- 5.3. δ 函数
- 6.1. 拉普拉斯变换
    1. 6.1.1. 定义
    2. 6.1.2. 基本性质
- 6.2. Laplace 变换的反演
- 6.3. 应用
- 7.1. 数学物理方程的导出
    1. 7.1.1. 均匀弦的微小横振动
        1. 7.1.1.1. 波动方程（双曲型方程）
        2. 7.1.1.2. 输运方程（抛物型方程）
        3. 7.1.1.3. 稳定场方程（椭圆型方程）
- 7.2. 定解条件
    1. 7.2.1. 初始条件
    2. 7.2.2. 边界条件
- 7.3. 数学物理方程的分类
    1. 7.3.1. 线性二阶偏微分方程
    2. 7.3.2. 两变量偏微分方程的分类
- 7.4. d'Alembert 公式 定解问题
    1. 7.4.1. d'Alembert 公式
    2. 7.4.2. 端点的反射
    3. 7.4.3. 定解问题是一个整体
    4. 7.4.4. 定解问题的适定性
- 8.1. 齐次方程的分离变数法
    1. 8.1.1. 分离变数法
- 8.2. 非齐次振动方程和输运方程
    1. 8.2.1. 傅里叶级数法
    2. 8.2.2. 冲量定理法
- 8.3. 非齐次的边界条件
- 8.4. Poisson 方程
- 9.1. 特殊函数常微分方程
    1. 9.1.1. Laplace 方程 $\lplc u=0$
        1. 9.1.1.1. 球坐标系
        2. 9.1.1.2. 柱坐标系
        3. 9.1.1.3. 直角坐标系
- 9.2. 常点邻域上的级数解法
    1. 9.2.1. 方程的常点和奇点

2. 9.2.2. 常点邻域上的级数解
3. 9.2.3. legendre 方程 自然边界条件
    1. 9.2.3.1. Legendre 方程的（Taylor）级数解
    2. 9.2.3.2. 级数解在 $x=\pm 1$ 是否收敛
    3. 9.2.3.3. 级数退为多项式
- 9.3. 正则奇点邻域上的级数解法
    1. 9.3.1. 奇点邻域上的级数解
    2. 9.3.2. 正则奇点邻域上的级数解

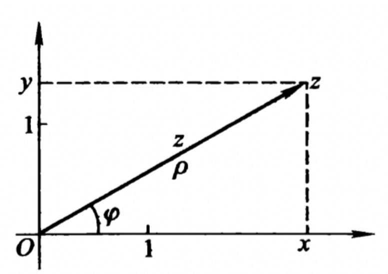
1. 复变函数

1.1. 复数与复数运算

1.1.1. 复数的基本概念

代数式

$$z=x+\mathbf{i}y$$



三角式

$$z=\rho\cos\varphi+i\sin\varphi$$

指数式

$$z=\rho\mathbf{e}^{i\varphi}$$

其中复数的模 $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ；幅角 $\varphi=\mathrm{Arg}z$

取

$$0\leq\mathbf{Arg}z\leq 2\pi$$

称 $\mathbf{arg}z$ 为 $\mathbf{Arg}z$ 的主值，或 z 的主辐角。

$$\varphi=\mathbf{Arg}z=\mathbf{arg}z=2k\pi$$

共轭复数：点对实轴的映像

$$z^*=x-\mathbf{i}y$$

当 $z=0$, 辐角无意义。
无限远点，辐角也无意义。

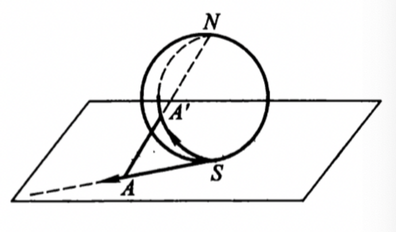


图 1－2

1.1.2. 运算

乘法：

除法：分母有理化

$$zz=z^2$$

$$zz^*=|z|^2$$

一般 $|z|^2\neq z^2$ ，除非是一个实数

- 整数次幂

$$z^n=\rho^n(e^{\mathbf{i}n\varphi})$$

- 整数次根式

$$\sqrt[n]{z}=\rho^{\frac{1}{n}}e^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{n}}$$

  由于复数 z 的辐角 φ 不能唯一确定（可以加减 $2n\pi$），所以
  $1^{\frac{1}{3}}$ 有三个不同的根， $1=e^{i2n\pi}$

1.2. 复变函数

1.2.1. 定义

若在复数平面或球面上存在一个点集 E ，对于 E 的每一点（每一个z 值），有一定规律，有一个或多个复数值 w 与之相对应，则称 w 为 z 的函数——**复变函数**，z 称为 w 的宗量，定义域为E ，记作

$$w=f(z),z\in E$$

1.2.2. 区域

邻域： 以复数 z_0 为圆心，以任意小正实数ε 为半径作一个圆，则圆内所有点的集合称为 z_0 的邻域。

- **内点**：
  若z_0 及其邻域均属于点集 E，则称 z_0 为该点集的内点。
- **外点**：
  若 z_0 及其邻域均属于点集 E，则称外点；
- **边界点（境界点）**：若在 z_0 的每个邻域内，既有属于 E 的，也有不属于E 的点，则称边界点。
- **边界线**：所有边界点构成的集合称为**边界线**。
  区域：满足 1. 全部由内点组成； 2. 具有连通性（任意两内点总可以用折线连接，且折线上的点都是内点）；
  区域 B 是区间的二维化，闭区域 $\bar{B}$：边界线上的点属于该区域；开区域：边界上的点不属于该区域。

1.2.3. 复变函数举例

- 三角函数

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathbf{i}x} - e^{-\mathbf{i}x})$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x})$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$$

  以及 $e^{\mathbf{i}z}$ 均为周期函数。但是 $\sin z, \cos z$ 的取值可以大于 1。
- 对数函数：是多值函数，且 z 可以小于 0

$$\ln z = \ln(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{Arg}z}) = \ln|z| + i\mathbf{Arg}z$$

- 指数函数 $z^s = \mathrm{e}^{s\ln z}$，$s$ 为复数。

一般地，复变函数归结为一对二元实变函数

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

有许多类似性质。
复变函数**连续**的充分必要条件：

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0)\text{且}\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0)$$

1.3. 导数

设 $w = f(z)$ 是在区域 B 上定义的单值函数，若在 B 上的某点，存在极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

且与 Δz 趋于 0 的方式无关，则称函数在 z 点可导，该极限称为函数 $f(z)$ 在z 的导数。
实变函数的求导规则直接应用于复变函数。

1.3.1. 柯西黎曼条件

若 Δz 沿平行于实轴方向逼近原点：

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x}\\=&\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

若 Δz 沿平行于虚轴方向逼近原点：

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x,y+\Delta y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x}\\=&\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

若可导，有实部与虚部对应相等

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

柯西 - 黎曼条件 或 C - R 条件，是复变函数可导的必要条件。

可导的充要条件：函数 $f(z)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial v},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 存在且连续，且满足柯西 - 黎曼条件

- 极坐标系下的 C - R 条件（作业）

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\rho}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\\\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}&=-\frac{\partial v}{\partial\rho}\end{aligned}$$

1.4. 解析函数

解析：函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域上处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析。
解析函数：函数 $f(z)$ 在区域 B 上处处解析，则称是 B 上的解析函数。
若函数解析，则函数可导。

- 解析函数的性质：

1. 若函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 B 上解析，则

$$u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$$

是 B 上的两组**正交曲线族**。
证明：用 C - R 条件得 $\nabla u\cdot\nabla v=0$，即 C_1 与 C_2 的梯度垂直，所以两曲线正交。（作业1）2023-02-27
2. 若函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 B 上解析，则 u,v 均为 B 上的**调和函数**。即满足二维的拉普拉斯方程（调和方程）。易证

$$\nabla^2 u(x,y,z)=0,$$
$$\nabla^2 v(x,y,z)=0.$$

u,v 是同一个复变函数 $f(z)$ 的实部和虚部，所以又称他们为共轭调和函数。

- 求全微分：已知虚部求实部或者反过来。
  - 曲线积分法：第二类曲线积分，沿 x,y 轴积分；
  - 凑全微分法：流体力学；
  - 不定积分法：先对 x 积分求出 v，保留 $\varphi(y)$，然后根据 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 求 $\varphi(y)$。

1.5. 平面标量场*

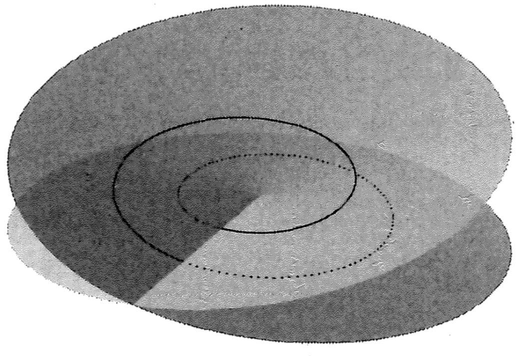
- 静电场：设 $u(x,y)$ 是电势，$v(x,y)$ 是电场强度通量密度，平面静电场的复势

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

- 流体的平面无旋运动：设 $u(x,y)$ 为流量函数（流函数），$v(x,y)$ 是速度势（势函数），那么 $f(z)$ 是流场的复势。
- 平面温度场
  更重要的是针对具体的平面长找出适当的复势

1.6. 多值函数*

复变函数的单值分支一般不独立。例如 $w=\sqrt{z}$，当 z 沿着闭合路径 l (l 包围 z) 绕行一周而回到 z_0，$\mathbf{Arg}z$ 增加了 2π，进入了另一单值分支 w_2。
支点：对于多值函数 $w=f(z)$，若 z 绕某点一周，函数值 w 不复原，而在该点各单值分支函数值相同。若当 z 绕支点 n 周，w 复原，则称该点为 $n-1$ 阶支点。



黎曼面： 图 2.7 $w=\sqrt{z-a}$ 的 Riemann 面
两个单值分支相互衔接，并且连续过渡，从一支到达另一支。

2. 复变函数的积分

2.1. 复变函数的积分

$$\int_l f(z)dz=\int_l u(x,y)\,\mathrm{d}x-v(x,y)\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\left\{\int_l v(x,y)\,\mathrm{d}x+u(x,y)\,\mathrm{d}y\right\}$$

路径积分归结为两个实变函数的线积分，分别是路径积分的实部和虚部。

- 积分不等式 1

$$|\int_l f(z)\,\mathrm{d}z|\leq\int_l|f(z)||\,\mathrm{d}z|$$

- 积分不等式 2

$$|\int_l f(z)\,\mathrm{d}z|\leq ML$$

  L 是围道周长，M 是 $|f(z)|$ 在 l 上的最大值。

2.2. 柯西定理

- 单连通区域：在区域作任何简单的闭合围道，围道内的点都是属于该区域的点。
- **柯西定理**：如果 $f(z)$ 在 $\bar{B}$ 上解析，则沿 $\bar{B}$ 上任一**分段光滑闭合**曲线 l (也可以是 $\bar{B}$ 的边界线)，有

$$\oint_l f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

  证明很简单，只需用格林公式。
  推广：在单连通区域 B 上**解析**，闭连通区域 $\bar{B}$ 上**连续**，则柯西定理的结论依然成立。
  意味着 $f(z)$ 的积分与路径无关，只和起止点有关。

- **复连通区域柯西定理**：如果 $f(z)$ 是闭复连通区域上的单值解析函数，则

$$\oint_l f(z)\,\mathrm{d}z+\sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

  l 是区域外边界线，诸 l_i 为区域内边界线，积分均沿正向进行。
  证明很简单，只需要作割线即可。视为一条边界线。

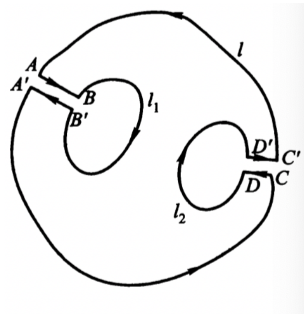


图 2－3

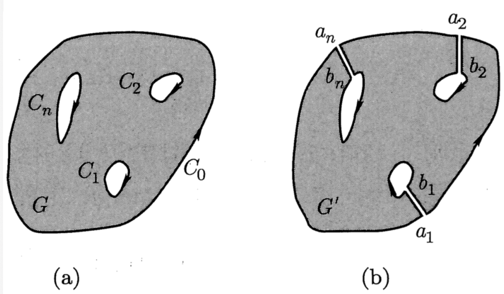


图 3.3 Cauchy 定理 (有界多连通区域)

  推论（变形定理）：对于某个闭单连通区域或闭复连通区域上解析的函数，若起止点不变，则当积分路径连续变形（不跳过孔或者奇点）时，函数积分制不变。

2.3. 不定积分

定理：如果函数 $f(z)$ 在有界单连通区域 G 内解析，则 $f(z)$ 的不定积分

$$F(z)=\int_z^{z_0} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\quad z\in G$$

也在 G 内解析，并且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}z,\quad z\in G$$

也称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。对于给定的函数 $f(z)$，其原函数并不唯一，差一个常数。证明略。
还可以证明，牛顿-莱布尼兹公式也会成立。
作业： P15 2. (8)(10) 3. (3)(4) 4. 思考和提高 1

2023-03-06
例：计算积分

$$I=\oint_l (z-\alpha)^n\,\mathrm{d}z\quad (n\text{为整数})$$

- 若回路 l 不包含 α，则被积函数在 l 所围区域上是解析的，按照柯西定理 $=0$；
- 若回路包围 α：
  1. $n\geq 0$, 仍解析, $=0$；

2. $n<0$, 由于积分与路径无关, 由变形定理, 把 l 变形为以点 α 为圆心，半径为 ε 的圆周 C . 在 C 上, $z-\alpha=\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}$,

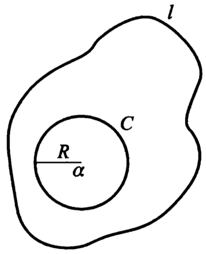


图 2 – 5

$$
\begin{aligned}
\oint_l (z-\alpha)^n \,\mathrm{d}z = \oint_{C_\varepsilon} (z-\alpha)^n \,\mathrm{d}z \\
&= \varepsilon^n \oint e^{\mathrm{i}n\varphi} \,\mathrm{d}(\alpha+\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}) \\
&= \mathrm{i}\varepsilon^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n+1)\varphi} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \begin{cases} 0, n \neq -1 \\ 2\pi\mathrm{i}, n=-1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

综上

$$
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_l \frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha} = \begin{cases} 0, l\text{不包围}\alpha \\ 1, l\text{包围}\alpha \end{cases}
$$

$$
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_l (z-\alpha)^n \,\mathrm{d}z = 0 \quad (n \neq -1)
$$

$n \neq -1$, 永远无奇点, $I=0$. $n=-1$, 分情况.

2.4. 柯西公式

柯西公式：若 $f(z)$ 在闭单连通区域 $\bar{B}$ 上解析，l 为 $\bar{B}$ 的边界线，α 为 $\bar{B}$ 内的任意一点，则

$$
f(\alpha) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha} \,\mathrm{d}z
$$

证明是简单的。

$$
\begin{aligned}
\oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\alpha)-f(z)}{z-\alpha} \,\mathrm{d}z \leq \oint_{C_\varepsilon} \left| \frac{max(f(\alpha)-f(z))}{z-a} \,\mathrm{d}z \right| \\
&\leq max|f(a)-f(z)| \cdot \left| \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}}{\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}} i \,\mathrm{d}\varphi \right| \\
&= 2\pi \quad max|f(\alpha)-f(z)|
\end{aligned}
$$

$$
(f(z)\text{是连续的} \lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon \to \alpha) = 0
$$

- 意义：将解析函数在任何一内点 α 的值 $f(\alpha)$ 用沿边界线 l 的回路积分表示了出来。这是因为解析函数在各点的值通过柯西-黎曼方程相互联系着。从物理上说，**解析函数紧密联系于平面标量场，而该场的边界条件决定着区域内部的场。**
- 通常将 $\alpha \to z, z \to \zeta$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

  - 复连通区域柯西定理公式：将 l 解释成所有边界线，且方向取正向（左手定则）
  - 推广到 l 外部包含无限远点的区域

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{l^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty)$$

  - 推论 1：高阶导数

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

- 推论 2：模数原理（略）
- 推论 3：刘维尔定理（略）

3. 幂级数展开

解决未知函数的重要的工具。
复数项级数，收敛，柯西判据，绝对收敛，一致收敛

- **定义** 如果级数的部分和有极限 s, 即

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

  那么称无穷级数收敛，极限 s 称为级数的和，如果 s_n 无极限（极限不存在或等于无穷大），那么称级数发散。

3.1. 复数项级数

- **柯西收敛判据**:
  对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，必有 N 存在，使得 $n > N$ 时，

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k| < \varepsilon$$

  p 为任意正整数。
- 若级数各项的模组成的级数收敛，则级数绝对收敛，**绝对收敛一定收敛。**

  - 设有两个绝对收敛的级数，和分别为 A, B ，那么逐项相乘后仍然收敛，而且和等于 $A, B.$
- 函数项复变级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 收敛的充要条件：柯西判据中$N(z)$ 是与 z 有关的。
  - 如果 N 与 z 无关，称级数在 B 或 l 上**一致收敛**。
- 一致收敛的级数具有下列性质
  1. 连续性
     如果一致收敛的级数每一项都是连续的，则和函数是连续的。（可以逐项求极限）
  2. 逐项求积分
  3. 逐项求导数
- Weierstrass 的 M 判别法（3.1 最后的定理）：
  若 $\exists N>0, \forall K>0, \forall z \in B, |u_k(z)| < a_k$, 且 a_k 与 z 无关，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ 在 B 内**绝对且一致收敛**。

3.2. 幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

其中 $z_0, a_0, a_1, a_2, \cdots$ 都是复常数，称以 z_0 为中心的幂级数。

- 正数项级数的**比值判别法（达朗贝尔判别法）**

  $$\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}||z-z_0| < 1$$

  那么正数项级数收敛，则原级数绝对收敛。若 >1 ，发散；若 $=1$，不确定。
- **根值判别法**
  若

  $$\lim_{k\to\infty} \sqrt{|a_k||z-z_0|^k} < 1$$

  则正数项级数收敛，原级数绝对收敛，若 >1 ，发散；若 $=1$，不确定。
  - 收敛圆
    以 z_0 为圆心作半径为 R 的圆 C_R。那么幂级数在**圆的内部** *绝对收敛* 且*一致收敛*，在圆外发散。圆的内部表示成 $|z-z_0| < R$，称为幂级数的收敛圆，半径称为收敛半径

    $$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \end{aligned}$$

    在圆上，级数的敛散性不确定。

- **例** 1 求幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} t^k = 1+t+t^2+t^3+\cdots t^k+\cdots$ 的收敛圆，t 是由 z 决定的复数.
  解：其收敛圆的内部为 $|z|<1$ ，收敛半径 $R=1$，和函数 $S_k = \dfrac{1}{1-t}(|t|<1)$ 。其他幂函数的研究可以借助该题结论
- 幂级数的和函数在收敛圆内部是解析函数，收敛圆内部无奇点。
- 幂级数在收敛圆内可以逐项求导任意多次，可以逐项积分，且不改变收敛半径。

3.3. 泰勒级数展开

- **泰勒级数** 设 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心，以 r 为半径的圆周 C_R 以内，则对圆内的任意 z 点，$f(z)$ 可以展开为幂级数

  $$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

  其中

  $$a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

  C_{R_1} 为圆 C_R 内包含 z 且与 C_R 同心的圆。
  证明是简单的。借助高阶函数的柯西公式和几何级数的展开式。
- 泰勒展开是唯一的。
- e^z 在 $z_0=0$ 的邻域上

  $$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \text{全平面}$$

- $\sin(z)$ 在 $z_0=0$ 邻域上

  $$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad z \in \text{全平面}$$

- $\cos(z)$ 在 $z_0=0$ 邻域上

  $$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad z \in \text{全平面}$$

- a^z 在 $z_0=0$

  $$a^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(z)^k}{k!} z^k, \quad z \in \text{全平面}$$

- $\ln z$ 在 $z_0=1$ 的邻域上

$$\ln z = n2\pi\mathrm{i} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k, \quad |z-1| < 1$$

$n = 0$ 是 $\ln z$ 的主值。

- $f(z) = (1+z)^m$ 在 $z_0 = 0$ 的邻域上，m 不只是整数

$$(1+z)^m = 1^m \left(1 + \frac{m}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \cdots\right), \quad |z| < 1$$

  其中，$1^m = e^{in2\pi}, n \in z. n = 0$ 即 $1^m = 1$ 的那一个称为 $(1+z)^m$ 的主值。非整数的**二项式定理**。

3.4. 解析延拓*

3.5. 洛朗级数展开

适用范围：当研究的区域上存在函数奇点时，不再能将函数展开成泰勒级数，而需要在除去奇点的环域（复连通区域）上展开。

- 双边幂级数：含有正负幂项的幂级数

$$\cdots a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

  令 $\zeta = (z-z_0)^{-1}$ ，化为

$$a_{-1}\zeta + a_{-2}\zeta^2 + \cdots + a_{-k}\zeta^k + \cdots$$

  设该级数在收敛圆 $|\zeta| < \frac{1}{R_2}$ 内部收敛，即在$|z-z_0| = R_2$ 的外部收敛。
  - 如果 $R_2 < R_1$ ，那么双边级数就在环域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ （收敛环）内绝对收敛且一致收敛，**其和为一解析函数**。
  - 如果 $R_2 > R_1$ ，则级数处处发散。
- **定理 Laurent Series** 设 $f(z)$ 在环域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 的内部单值解析，则内部任一点 z ，$f(z)$ 可展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

  其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

  C 为位于环域内按逆时针方向绕内圆一周的任一闭合曲线。
  - 点 z_0 未必是函数 $f(z)$ 的奇点。

- 尽管 Laurent Series 中的系数与 Taylor Series 中的 a_k 表达式相同，但是这里 $a_k \neq \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. **没奇点就不存在洛朗级数，或者说洛朗级数退化为泰勒级数。**

- **例 1** 在 $z=1$的邻域和 $1<|z|<\infty$ 展 $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$为 Laurent Series.

  解：当 $1<|z|<\infty$ ，令展开中心为 $z_0=0$,

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{z^2})^k=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}+\cdots$$

  在 $z=1$ 的邻域上,

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z+1)(z-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1})$$

  而

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k}^{\infty}(-\frac{z-1}{2})^k \quad (|\frac{z-1}{2}|<1)$$

  所以

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}(z-1)^k \quad (0<|z-1|<2)$$

  只有一个负幂次项。

- **例 2** 在 $z_0=0$ 的邻域上展开 $f(z)=\frac{1}{1-3z+2z^2}$.

  解：展开中心 $z_0=0$ 不是 $f(z)$ 的奇点。

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\frac{1}{1-2z}=-\frac{1}{1-z}+\frac{2}{1-2z}=\sum_{k=0}(2^{k+1}-1)z^k$$

  收敛域 $|z|<\frac{1}{2}$ ，这个区域是单通区域，收敛域不包含奇点，所以这是一个 Taylor 级数。
  两种方法，加法，乘法。
  例 3 在 $z_0=0$ 的邻域上展开 $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$.
  解：

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k, |z|<1$$

左右两边对 z 求导

$$(\frac{1}{1-z})' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)'$$

$$即\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1} = \sum_{k=-1}^{\infty}(k+1)z^k, |z| < 1$$

Taylor 级数

例 4 在 $z=0$ 的邻域上展开 $\dfrac{\sin z}{z}$

解:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sin z = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}, 0 < |z| < \infty$$

无负幂次项，是泰勒级数

- **洛朗级数不一定有负幂项，有负幂项一定是洛朗级数。**
- 在复连通区域上展开的一定是洛朗级数。

2023-03-20

- **例 5** 在 $z_0 = 0$ 的邻域上将 $e^{1/z}$ 展开
  利用 e^z 的表达式，将 z 全换成 $1/z$ 即得

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-k} = \sum_{=-\infty}^{0}\frac{z^k}{(-k)!}, \quad (|z| > 0)$$

出现无限多负幂项，洛朗级数。

3.6. 孤立奇点的分类

- **孤立奇点**：函数只在展开中心 z_0 处不可导，在 z_0 的邻域可导。
  级数中$(z-z_0)^{-1}$ 项的系数 a_{-1} 称为留数（残数）。
  正幂项：解析部分；负幂项：主要部分（无限部分）
  - **可去奇点**：没有负幂项，且**函数在 z_0 处的极限存在**，总可以定义函数在该点的极限

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0$$

作为该函数的补充值。可去奇点一般不被当做奇点。例 4
- **极点**：有限多个负幂项，且**函数在 z_0 处的极限是无穷大**

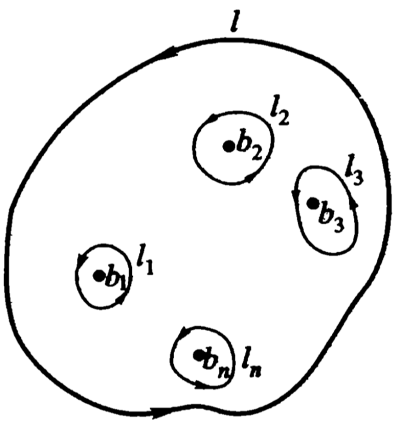
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty,$$

最高负幂次称为极点的阶。一阶极点又称为**单极点**。例1
- **本性奇点**：无限多个负幂项，**且函数在 z_0 处的极限不存在（与 z 靠近 z_0 的方式有关）**
例 5

- **无穷远点的留数**：推广至无限远点为孤立奇点的情况，完全相反。其留数定义为 $-a_{-1}$

4. 留数定理

4.1. 留数定理



设有界区域 G 的 边界 l 为分段光滑的简单闭合曲线，如除去有限个孤立奇点 $b_k, k=1,2,3,\cdots,n$ 外函数 $f(z)$ 在 G 内单值解析、在 $\bar{G}$ 中连续并且 $f(z)$ 在边界 l 上连续，则沿区域 G 边界正向的积分

$$\oint_l f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Res} f(b_k)$$

证明略。

- 计算留数
  - **单极点** z_0

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots.$$

那么

$$\mathbf{Res} f(z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \text{非零有限值}$$

如果该极限是**非零有限值**，那么留数存在。否则单极点的留数不存在。
若 $f(z)=P(z)/Q(z)$，$P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 点解析， z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点。
$P(z_0)\neq 0$ ，从而 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\mathbf{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

- m **阶极点**
  判别 z_0 是否是 m 阶极点

$$\lim_{z\to z_0}[\underbrace{(z-z_0)^m f(z)}_{\text{全平面解析},Taylor Series}]=\text{非零有限值(不是留数)}$$

  由泰勒级数，计算式为

$$\mathbf{Res}f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]\right\}_{z=z_0}$$

- 本性奇点
  只能将 $f(z)$ 展开为洛朗级数，得到 a_{-1} .

- **例 1** $f(z)=\dfrac{1}{z^n-1}$ 在 $z_0=1$ 的留数。
  解：

$$f(z)=\frac{1}{z^n-1}=\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)}$$

  $z_0=1$ 是分母的一阶零点，所以是单极点。

$$\begin{aligned}\mathbf{Res}f(1)&=\lim_{z\to1}[(z-1)\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)}]\\&=\lim_{z\to1}\frac{1}{z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1}\\&=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

  或者

$$\mathbf{Res}f(1)=\lim_{z\to1}\left[\frac{1}{(z^n-1)'}\right]=\lim_{z\to1}\frac{1}{nz^{n-1}}=\frac{1}{n}.$$

- **例 2** $f(z)=\dfrac{1}{\sin(z)}$ 的留数。

$$\lim_{z\to n\pi}\frac{1}{\sin(z)}=\infty$$

  所以 $z_0=n\pi$ 是极点。但是不清楚是几阶极点。为此，考察

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)^m\frac{1}{\sin z}=\lim_{z\to n\pi}\frac{m(z-n\pi)^{m-1}}{\cos z}=\begin{cases}0,m>1\\(-1)^n,m=1\end{cases}$$

  所以，$z_0=n\pi$ 只可能是单极点。

$$\lim_{z\to n\pi}\frac{1}{(\sin z)'}=(\frac{1}{\cos z})_{z=n\pi}=(-1)^n$$

例 3 $f(z)=\dfrac{z+2\mathrm{i}}{(z^5+4z^{3})}$的留数

$f(z)$ 的奇点就是分母的零点。

例 4 计算

$$I=\oint_{|z|=1}\mathrm{d}z\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\quad(0<z<1)$$

解 求得分母的零点，即为极点。剔除在回路内的极点，然后计算函数的留数，即为积分值。

4.2. 留数定理计算实变函数定积分

- **类型 I** 有理函数的三角积分

$$\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$$

  被积函数是三角函数的有理式；积分区间 $[0,2\pi]$，作代换

$$\begin{aligned}z=e^{\mathrm{i}x}\\ \cos x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})\\ \sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-z^{-1})\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

  化为

$$I=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

  例子略

- **类型 II** 无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

  复变函数$f(z)$ 在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个孤立奇点外是解析的；当 z 在上半平面和实轴上 $\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致地 $\to 0$

  如果 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$，$\varphi(x)$ 无零点，且 $\psi(x)$ 的次数至少高于 $\varphi(x)$ 两次。化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_k\mathbf{Res}(\text{上半平面})$$

- **类型 III**

$$\int_0^{\infty} F(x)\cos mx\,\mathrm{d}x, \int_0^{\infty} G(x)\sin mx\,\mathrm{d}x$$

$F(z)$ 是偶函数，$G(z)$ 是奇函数，在实轴上无奇点，在上半平面除有限个孤立奇点外是解析的；当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时，$F(z), G(z)$ 一致地 $\to 0$.

$$\int_0^{\infty} F(x)\cos mx\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\{F(z)e^{\mathrm{i}mz}\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\}$$
$$\int_0^{\infty} G(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = \pi\{G(z)e^{\mathrm{i}mz}\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\}$$

- **Jordan 引理** 若 $m>0, C_R$ 是以原点为圆心而位于上半平面的半圆周，又设当 z 在上半平面及实轴上 $\to\infty$ 时 $F(z)$ 一致地 $\to 0$, 则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z = 0$$

如果 $m<0$, C_R 改为 C_R' , 后者是前者对实轴的映像。

- **补充引理** 设函数 $Q(z)$ 只有有限个奇点, 且在下半平面的范围内, 当 $|z|\to\infty$ 时一致 $\to 0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pz}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\times\sum_{\text{全平面}}\mathbf{Res}\left\{Q(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pz}\right\} \\ &= -2\pi\mathrm{i}\times\mathbf{Res}\left\{Q(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pz}\right\}_{z=\infty},\end{aligned}$$

- **例** 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

解：

- 积分路径（实轴）上有奇点
  - **(小圆弧引理)** 如果函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点的空心邻域内连续, 并且在 $\theta_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\theta_2$ 中, 当 $|z-a|\to 0$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k, 则

  $$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k\left(\theta_2-\theta_1\right)$$

  其中 C_δ 是以 $z=a$ 为圆心、 δ 为半径、张角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧,
  $|z-a|=\delta, \theta_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\theta_2,$
  - **(大圆弧引理)** 设 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内连续, 在 $\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2$ 中, 当 $|z|\to\infty$ 时, $zf(z)$ （这就是单极点的求法）一致地趋近于 K, 则

  $$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K\left(\theta_2-\theta_1\right),$$

其中 C_R 是以原点为心、 R 为半径、张角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧, $|z|=R, \theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$.

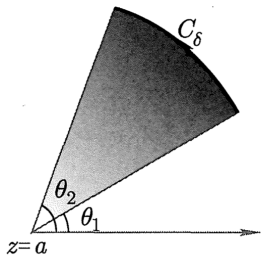


图 3.6

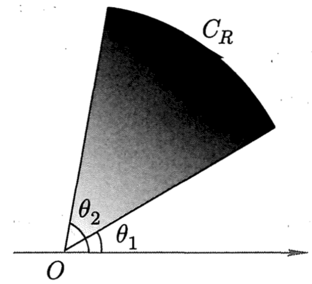


图 3.7

就复变积分而言，在积分路径上可以有奇点，但这种奇点一般说来只能是一阶极点。如果是二阶或二阶以上的极点，或是本性奇点，沿小圆弧的积分极限值就可能不存在。

- 重要结果（Γ 函数）

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

5. 傅里叶变换

5.1. 傅里叶级数

- 傅里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l})$$

其中

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$
$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

- 复数形式的傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{\mathrm{i}k\pi x/l}$$

其中

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{\mathrm{i}k\pi x/l}\,\mathrm{d}x$$

- **狄利克雷定理**
若函数 $f(x)$ 满足

- 处处连续，或在每个周期中只有有限个第一类间断点；
- 在每个周期中只有有限个极值点，
  则级数收敛，且

$$
\text{傅里叶级数和} = \begin{cases} f(x) & ,x\text{是连续点} \\ \dfrac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) & ,x\text{是间断点} \end{cases}
$$

- 傅里叶级数中的三角函数族具有完备性、正交性。
- 奇函数，只有 $\sin kx$ 项；
  偶函数，只有 $\cos kx$ 项。

5.2. 傅里叶积分与傅里叶变换

5.2.1. 实数形式的傅里叶变换

傅里叶积分：

$$
f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega + \int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega
$$

其中，频谱关系（傅里叶变换）

$$
\begin{cases} A(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x \\ B(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x \end{cases}
$$

$f(x)$ 必须满足**傅里叶积分定理**：在任意区间均满足狄利克雷条件，且函数在全空间上绝对可积（无穷积分收敛），那么

$$
\text{傅里叶积分值} = \begin{cases} f(x) & ,x\text{是连续点} \\ \dfrac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) & ,x\text{是间断点} \end{cases}
$$

- 奇函数，只有 $\sin\omega x$ 项；
  偶函数，只有 $\cos\omega x$ 项。

5.2.2. 复数形式的傅里叶积分

$$
\text{原函数}: f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega
$$

$$
\text{像函数}: F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[e^{\mathrm{i}\omega x}]^*\,\mathrm{d}x
$$

其中

$$F(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{2}[A(\omega)-\mathrm{i}B(\omega)],\omega\geq 0\\ \frac{1}{2}[A(|\omega|)+\mathrm{i}B(|\omega|)],\omega<0\end{cases}$$

表达为

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(x)],\quad f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

例 求矩形函数 $f(t)=h\,\mathrm{rect}(\frac{t}{2T})$ 复数形式的傅里叶变换
广谱性

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[h\mathrm{rect}(\frac{t}{2T})]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h\mathrm{rect}(\frac{t}{2T})e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{h}{2\pi}\int_{-T}^{T}e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=-\frac{h}{2\pi\mathrm{i}\omega}e^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-T}^{T}\\&=\frac{h}{\pi}\frac{\sin\omega T}{\omega}\\&=\frac{hT}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{T}{\pi\omega})\end{aligned}$$

其中引入了sinc 函数

$$\mathrm{sinc}x=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$$

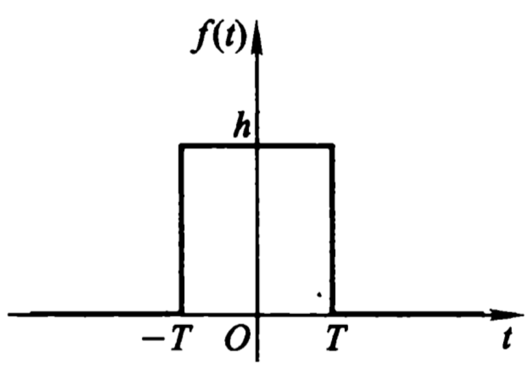


图 5－1

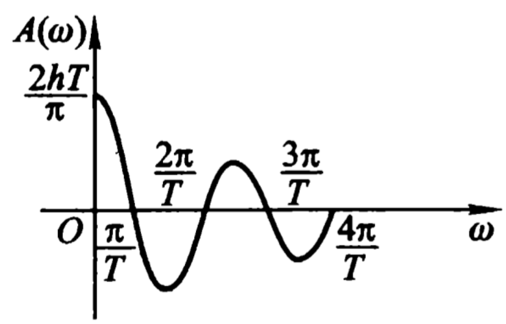


图 5－2

5.2.3. 傅里叶变换的基本性质

这些性质可以用来解微分方程

1. 导数定理

$$\mathscr{F}\left[f'(x)\right]=\mathrm{i}\omega F(\omega).$$

2. 积分定理

$$\mathscr{F}\left[\int^{(x)} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega).$$

3. 相似性定理

$$\mathscr{F}[f(ax)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$$

4. 延迟定理

$$\mathscr{F}\left[f\left(x-x_0\right)\right]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}F(\omega)$$

5. 位移定理

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}f(x)\right]=f\left(\omega-\omega_0\right).$$

6. 卷积定理
   若

$$\mathscr{F}\left[f_1(x)\right]=F_1(\omega),\quad \mathscr{F}\left[f_2(x)\right]=F_2(\omega),$$

   则

$$\mathscr{F}\left[f_1(x)*f_2(x)\right]=2\pi F_1(\omega)F_2(\omega)$$

5.2.4. 多重傅里叶积分

引入 $r=i_1x+i_2y+i_3z,\quad k=i_1k_1+i_2k_2+i_3k_3$，三维傅里叶变换是

$$f(\boldsymbol{r})=\iiint_{-\infty}^{\infty}F(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k},$$
$$F(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{r})\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]^*\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

5.3. δ 函数

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

广义函数理论，应在积分运算下理解

$$\int_a^b\delta(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, ab>0\\ 1, a<0<b\end{cases}$$

$\delta(x-x_0)$ 在 $x=x_0$ 处是无穷大，但曲线下的面积是有限值 1

- 性质
  1. 是奇函数，导数是偶函数

2. 阶跃函数

$$H(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0,x<0\\1,x>0\end{cases}$$

或者

$$\delta(x)=\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}$$

3. 挑选性：定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $f(\tau)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(\tau-t_0)\,\mathrm{d}\tau=f(t_0)$$

4. 如果 $\varphi(x)=0$ 的实根 $x_k(k=1,2,3,\cdots)$ 全是单根，则

$$\delta[\varphi(x)]=\sum_k\frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|}$$

$$\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|},$$
$$\delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{2|a|}=\frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{2|x|}$$

- δ 函数的函数序列定义式

$$\delta(x)=\lim_{l\to0}\frac{1}{l}\mathrm{rect}(\frac{x}{l})$$
$$\delta(x)=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x}$$
$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$$

  三种定义式，其无穷积分均为 1.

- δ 函数的傅里叶变换

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}$$

- δ 函数的傅里叶积分

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$$

6. 拉普拉斯变换

6.1. 拉普拉斯变换

6.1.1. 定义

Laplace 变换

$$\bar{f}(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

e^{-pt} 称为变换核。$f(t)$ 是原函数，$\bar{f}(p)$ 是像函数。

- 满足两个条件
  - $f(t)$ 在区间 $[0,\infty)$ 上除了第一类间断点外都是连续的，且有连续的导数，在任何有限区间内，间断点数目有限。
  - $f(t)$ 的增长指数有限，即存在 $M>0$，$t_0>0,\sigma\geq 0$，有

  $$|f(t)|<Me^{\sigma t}$$

  而 σ 的下界称为收敛横标，用 σ_0 表示。
  例 1 求 $\mathscr{L}[1]$.
  解

  $$\mathscr{L}[1]=\int_0^{\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p},\Re p>0或\sigma>0.$$

  例 2 求 $\mathscr{L}[t]$.
  解

  $$\mathscr{L}[t]=\frac{1}{p^2},\Re p>0$$

  同理
  例 3 求 $\mathscr{L}[e^{st}]$.
  解

  $$\mathscr{L}[e^{st}]=\frac{1}{p-s},\Re p>\Re s$$

- 衍生结论

  $$\mathscr{L}[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}$$
  $$\mathscr{L}[te^{st}]=\frac{1}{(p-s)^2}$$
  $$\mathscr{L}[t^ne^{st}]=\frac{n!}{(p-s)^{n+1}}$$

- 导数运算
  若 $\mathscr{L}[f(t)]=\bar{f}(p)$，那么

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \bar{f}(p)$$

6.1.2. 基本性质

1. 解析
   $\bar{f}(p)$ 是在 $\Re p = \sigma > \sigma_0$ 的半平面上的解析函数。
2. 满足极限为0

$$\lim_{\Re p \to +\infty} \bar{f}(p) = 0$$

   且当 $\Re p = \sigma > \sigma_0$ 时，

$$\lim_{\Im p \to \pm\infty} \bar{f}(p) = 0$$

   几个重要性质
3. **线性定理**
4. **导数定理**

$$\mathscr{L}[f'(t)] = p\bar{f}(p) - f(0).$$

5. **积分定理**

$$\mathscr{L}[\psi(t)] = p\int_0^t \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

6. 相似性定理（以下与傅里叶变换类似）

$$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\bar{f}(\frac{p}{a})$$

7. 位移定理

$$\mathscr{L}[f(t)e^{-\lambda t}] = \bar{f}(p+\lambda)$$

8. 延迟定理

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)] = e^{-pt_0}\bar{f}(p)$$

9. 卷积定理

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p)$$

   证明是简单的，只需要交换积分次序，然后积分代换即可。

- 例 6

$$\mathscr{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

同理

$$\mathscr{L}[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

6.2. Laplace 变换的反演

1. 有理分式反演法
2. 查表
3. 黎曼-梅林反演公式

6.3. 应用

- **例 1** 求解 RL 电路的电流 $j(t)$.
- **例 2** 求解初级电路和次级电路的电流。

7. 数学物理定解问题

数学物理方程：以数学方程表达的物理问题，通常表现为偏微分方程，例如随空间坐标 $\vec{r}(x, y, z)$ 和时间坐标 t 变化的物理量——场。例如 $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t)$.
这些物理量的分布和演化规律是由物理规律解决：普遍性亦即共性。
同一类物理现象中，各个问题又各有其特殊性即个性，物理规律不反应个性。
数学物理方程，作为描述同一类物理现象的共性，跟具体条件无关，称为**泛定方程**：抽除其特定物理特征，而讨论数学上具有典型性的方程
边界条件：考虑研究对象处在怎样特定的环境之中。
初始条件：研究对象的特定历史，即它在早先某个所谓“初始”时刻的状态
二者合称定解条件。定解条件：需要大量观测和实验结果确定。
定解条件+泛定方程=定解问题

7.1. 数学物理方程的导出

7.1.1. 均匀弦的微小横振动

7.1.1.1. 波动方程（双曲型方程）

均匀：线质量密度 ρ 一致
弦：一维
微小：振动幅度 $<<$ 弦长
横：与弦方向垂直
研究内容：各点的位移随时间 t 的变化

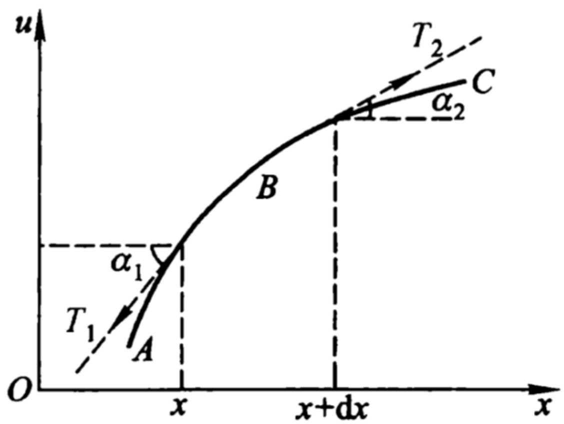


图 7－1

绷紧的弦：具有张力（弹性力），设原位置为 x 轴，弦上各点的横向位移为 $u(x,t)$ ，弦的横向加速度

细分为极小的小段 $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}x$，$B$ 只受到邻段 A,C 的拉力 T_1 和 T_2 ，没有纵向运动，所以作用于 B 的纵向合力为 0.

近似：忽略弦长的变化， $u<<l$ ；忽略重力。

- **自由振动弦方程**

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$$

  其中，$a=\sqrt{T/\rho}$.

- **受迫振动弦方程**

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{f}{\rho}$$

  其中 f/ρ 是单位质量受的外力.

- 杆的纵振动方程，与弦的横振动方程一致
- **三维波动方程**

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\nabla^2u=0$$

  其中 a 是振动传播速率。

  例如电磁波方程

$$\frac{\partial^2E}{\partial t^2}-a^2\nabla^2E=0,$$
$$\frac{\partial^2H}{\partial t^2}-a^2\nabla^2H=0.$$

  其中 $a^2=\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}=c^2$ ， c 是光速。

- 总结
  自由振动的弦方程、受迫振动的弦方程、传输线方程（一维），
  薄膜微小横振动方程（二维），
  流体力学与声学方程、电磁波方程（三维）。

7.1.1.2. 输运方程（抛物型方程）

- 扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=f(x,y,z,t)$$

  其中 $a^2=\dfrac{1}{D}$，称为扩散率，$f(x,y,z,t)$ 则是单位时间内在单位体积中该种分子的产率. 设浓度 u 在空间中的分布和在时间中的变化 $u(\vec{r},t)$，扩散定律

$$\vec{q}=-D\nabla u$$

  其中，$\vec{q}$ 是扩散流强度（流量），D 是扩散系数。
- 热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=f(x,y,z,t)$$

  $u(x,y,z,t)$ 是温度，$a^2=\dfrac{k}{c\rho}$，k 是热传导系数，c 是比热 $\mathrm{J/(kg\cdot K)}$，ρ 是密度，f 是产热率。

7.1.1.3. 稳定场方程（椭圆型方程）

- 稳定浓度分布，稳定温度分布，均满足 Possion 方程或Laplace 方程。（略）
- 静电场的 Possion 方程

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

  其中 φ 是静电势，ρ 是电荷体密度，ε_0 是（真空）介电常数。若无源 $\rho=0$，则退化为 Laplace 方程（调和方程）

$$\nabla^2\varphi=0$$

- 恒定电流场的 Possion 方程
  与静电场类似（略）
- Helmholtz 方程
  如果 u 随着时间周期性变化， $u(x,y,z,t)=v(x,y,z)e^{-\mathrm{i}\omega t}$，则 v 满足

$$\nabla^2 v+k^2 v=0$$

其中 $k=\dfrac{\omega}{a}$ 称为波数。

- 不可压缩流体无旋流动，速度势满足的 Possion 方程和 Laplace 方程，设速度势 $\vec{v}=-\nabla\varphi$.

表 12.1

方程类型	方　程	线性算符 $\hat{L}$
波动方程	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u=f$	$\hat{L}\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2$
热传导方程	$\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\nabla^2 u=f$	$\hat{L}\equiv\dfrac{\partial}{\partial t}-\kappa\nabla^2$
Poisson 方程	$\nabla^2 u=f$	$\hat{L}\equiv\nabla^2$
Helmholtz 方程	$\nabla^2 u+k^2 u=f$	$\hat{L}\equiv\nabla^2+k^2$

7.2. 定解条件

7.2.1. 初始条件

1. 输运方程

$$u(x,y,z,t=0)=\varphi(x,y,z)$$

2. 波动方程
   初始位移

$$u(x,y,z,t=0)=\varphi(x,y,z)$$

   和初始速度

$$\frac{\partial u(x,y,z,t=0)}{\partial t}=\psi(x,y,z)$$

3. 稳定场分布: 不需要初始条件

7.2.2. 边界条件

用 Σ 表示边界，M 代表区域边界上的变点，H 常数，f 已知，

1. 第一类边界条件(Dirichlet 条件): 给定边界上 u 的数值

$$u(\vec{r},t)\Big|_{\Sigma}=f(M,t)$$

   例: 两端固定的弦的振动.

$$u(x=0,t)=0,$$
$$u(x=l,t)=0.$$

2. 第二类边界条件(Neumman 条件): 给定 u 在边界外法线上的方向导数的数值

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma}=f(M,t)$$

3. 第三类边界条件(混合边界条件): 给定 u 和(外)法向导数的线性组合在边界上的数值

$$\left.(u+H\frac{\partial u}{\partial n})\right|_{\Sigma}=f(M,t)$$

   例: 细杆自由冷却问题，遵循 Newton 冷却定律，即当物体表面与周围存在温度差时，单位时间从单位面积散失的热量与温度差成正比，比例系数称为热传递系数.

4. 无穷远条件: 未知函数在无穷远点的极限行为
5. 有界条件: 平面极坐标系、柱坐标 系或球坐标系时，偏微商 $\frac{\partial u}{\partial r}$ 在坐标原点失去意义，因而需要针对具体情况，在坐标原点补充上有界条件或其他条件.
6. 衔接条件(连接条件): 在区域内部物理性质发生突变，认为微分方程在跃变点不成立.
   例: 静电场的衔接条件

$$\left.\varphi_1\right|_{\Sigma}=\left.\varphi_2\right|_{\Sigma},$$
$$\left.\varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{\Sigma}=\left.\varepsilon_2\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{\Sigma}.$$

7.3. 数学物理方程的分类

7.3.1. 线性二阶偏微分方程

阶: 包含在偏微分方程中未知量导数的最高阶。
齐次性: 有源(外力、热源、电荷)的方程是非齐次的，无源的是齐次的。
线性: 如果偏微分方程中未知量的偏导数都是以一次方形式出现的，不含偏导数的乘积及未知函数的乘积形式。那么方程称为线性方程，否则是非齐次方程。
对于线性方程，满足**线性叠加原理**：若泛定方程和定解条件都是线性的，那么**可以把定解问题看成是几个部分的线性叠加，只要这些部分的方程及条件的同样的线性叠加是原来的方程及条件即可。**

7.3.2. 两变量偏微分方程的分类

设方程一般形式

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0$$

作代换

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases}$$

得到

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta + Cu + F = 0$$

如果取一阶偏微分方程

$$a_{11}z_x^2$$

7.4. d'Alembert 公式 定解问题

7.4.1. d'Alembert 公式

对一维波动方程

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}) = 0$$

即

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})u = 0$$

- 变量代换（略），得到通解

  $$u = f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

  这通解的物理意义：
  $f_1(x - at)$ 代表速度 a 沿着 x 正方向移动的行波；
  $f_2(x + at)$ 以 $v = a$ 沿着负方向移动的行波。
- 利用定解条件定出 f_1, f_2
  假定无限长，即不存在边界条件，
  设初始条件

  $$u(t = 0) = \varphi(x), u(t) = \psi(x), x \in (-\infty, +\infty)$$

  d'Alembert 公式

  $$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) - \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

7.4.2. 端点的反射

- 半无限长弦振动，会有半波损失，即固定端点处的反射波相位相差 π .
  定解问题描述成当 $x > 0$,

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(t=0) = \varphi(x), \\ u_t(t=0) = \psi(x), \\ u(x=0,t) = 0. \end{cases}$$

  进行奇延拓，扩展到 $-\infty < x < \infty$.
  那么当 $x \geqslant 0$，设

$$\varphi(x) = \Phi(x), \psi(x) = \Psi(x)$$

  由 $u(x=0,t)=0$,得到

$$\frac{1}{2}(\Phi(at) + \Phi(-at)) + \frac{1}{2a}(\int_{-at}^{at} \Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi) = 0$$

  不妨取

$$\begin{cases} \Phi(at) = -\Phi(-at), \\ \displaystyle\int_{-at}^{at} \Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 \text{或} \Psi(\xi) = -\Psi(-\xi) \end{cases}$$

  那么相当于作奇延拓，

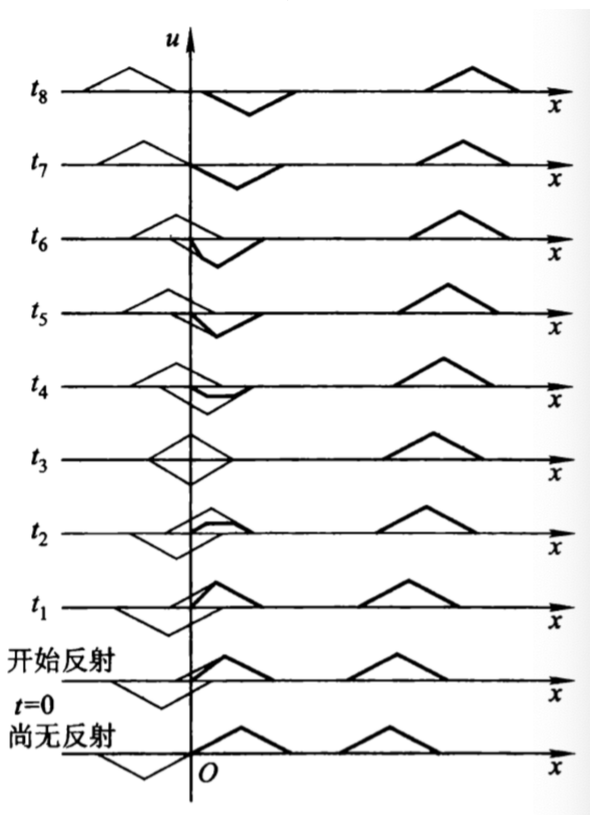


图 7 – 17

  端点的影响表现为反射波，反射波相位与入射波相反，所以出现半波损失。解略

- 半无限长杆纵振动，端点自由，无半波损失.

7.4.3. 定解问题是一个整体

必须同时考虑泛定方程和定解条件，以进行求解。

7.4.4. 定解问题的适定性

可以证明，波动方程、输运方程、稳定场方程分布的定解问题是适定的。
适定问题 1. 有解，2. 解唯一，3. 解稳定.
绝对值不等式

$$||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$$

8. 分离变数法

适用于大量的各种定解问题，只限于本征函数为三角函数。

8.1. 齐次方程的分离变数法

8.1.1. 分离变数法

separation of variations ，或驻波法
两端固定的均匀弦的振动。

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2 u_{xx}=0, \\ u(t=0)=\varphi(x), u_t(t=0)=\psi(x), \\ u(x=0,t)=0, u(x=l)=0. \end{cases}$$

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入边界条件和方程中，得

$$\begin{aligned} & XT''-a^2X''T=0 \\ \Rightarrow & \frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda \end{aligned}$$

因此原来的问题分离为了两个问题，空间方程

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases}$$

和时间方程

$$T''+\lambda a^2 T=0$$

对于空间方程, $\lambda \leqslant 0$ 均没有实际意义。所以 λ 只能大于零，此时方程解为

$$X(x)=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

积分常数由条件确定

$$\begin{aligned}C_1&=0,\\C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)&=0.\end{aligned}$$

只能是

$$\begin{aligned}&\sin(\sqrt{\lambda}x)=0\\\Rightarrow&\sqrt{\lambda}l=n\pi\\\Rightarrow&\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2},n\in Z\end{aligned}$$

所以，时间方程

$$X(x)=C_2\sin\frac{n\pi x}{l},$$

对于时间方程，

$$T''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T=0$$

解为

$$T(t)=A\cos\frac{n\pi a}{l}t+B\sin\frac{n\pi a}{l}t.$$

原方程是线性齐次方程，本征振动的线性叠加是方程的解，

$$u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入边界条件可以求得系数具体表达式。

- 总结: 对**齐次方程和齐次边界条件**，设**非零解**为乘积形式 $\to$ 偏微分方程转化为常微分方程 $\to$ 在边界条件下解常微分方程得到**本征值，本征解** $\to$ 第二个变数方程求解 $\to$ 结合初始条件定出系数.
- **例 1** 棒的自由纵振动，第二类齐次

  $$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\\u_x(x=0)=0,u_x(x=l)=0,\\u(t=0)=\varphi(x),u_t(t=0)=\psi(x)\end{cases}$$

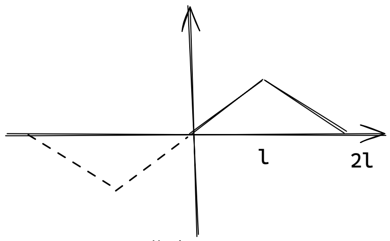
  其本征函数

  $$X(x)=C_1\cos\frac{n\pi x}{l},n=0,1,2,\cdots$$

  一般解

$$u = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

- **例 2** 细杆导热问题
  齐次边界条件是强限定条件，给出本征值、本征函数。
  在 $x = 0$ 作奇延拓，和在 $x = l$ 作偶延拓



$$\frac{u}{l} x = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{2k+1}{2l}, 0 < x < 2l$$

所以

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{2l} \int_0^{2l} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{2l} \,\mathrm{d}x$$

但是

$$\varphi(x) = \varphi(2l - x)$$

所以

$$\sin \frac{k\pi(2l-x)}{2l} = \begin{cases} -\sin \frac{2n\pi x}{2l}, k = 2n, \\ \sin \frac{2n\pi x}{2l}, k = 2n+1. \end{cases}$$

所以 $(l, 2l)$ 上和 $(l, 2l)$ 上的偶数次项一一相消，只需要计算 2 倍的 $(0, l)$ 的奇数次的积分

$$\varphi_n = \frac{2}{2l} \cdot 2 \cdot \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \,\mathrm{d}x$$

这样 $C_n = \varphi_n$，即求得一般解系数。

8.2. 非齐次振动方程和输运方程

8.2.1. 傅里叶级数法

傅里叶级数法：如存在其次边界条件，意味着决定了解中包含的某种本征函数/值 $X(n)$ ，由此不妨设

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t) X_n(x)$$

而 $X_n(x)$ 一般是正弦（余弦）函数谱，如果视 $T_n(t)$ 为奇数系数，那么 $u(x,t)$ 是以傅里叶级数形式表达的一个解，将此解代入方程和条件，如果 $T_n(t)$ 可确定，则解可以确定。

- 例 1
  定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t, \\ u_x(x=0) = 0, u_x(x=l) = 0, \\ u(t=0) = \varphi(x), u_t(t=0) = \psi(x) \end{cases}$$

解: 满足边界条件的本征函数是 $\cos\frac{n\pi x}{l}$，可以写出解

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

代入非齐次泛定方程，得

$$T_n'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n = 0, n \neq 1$$
$$T_1'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_1 = A\sin\omega t$$

这组方程的解是

$$\begin{aligned} T_0'' = 0 \to T_0 = A_0 + B_0 t, \\ T_n = A_n \sin\frac{n\pi at}{l} + B_n\cos\frac{n\pi at}{l}, \\ T_1 = A_1\cos\frac{\pi at}{l} + B_1\sin\frac{\pi at}{l} + T_{1s} \end{aligned}$$

常数变易法，设特解 $T_{1s} = C\sin(\omega t)$ ，代入可得

$$T_{1s} = \frac{A}{\frac{\pi^2A^2}{l^2} - \omega^2}\sin(\omega t)$$

于是一般解为

$$A_0 + B_0 t + \frac{A}{\frac{\pi^2A^2}{l^2} - \omega^2}\sin\omega t\cos\frac{\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{n}(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l})\cos\frac{n\pi x}{l}$$

由初始条件

$$\begin{aligned} u(t=0) = \varphi(x) = \sum_n \varphi_n\cos\frac{n\pi x}{l} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{l} \\ \Rightarrow A_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \\ A_0 = \varphi_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

以及

$$u_t(t=0)=\psi(x)=\sum_n \psi_n \cos\frac{n\pi x}{l}=B_0+(\frac{A\omega}{\frac{\pi^2a^2}{l^2}-\omega^2}+B_1\frac{\pi a}{l})\cos\frac{\pi x}{l}+\sum_{n=2}\frac{n\pi a}{l}B_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$B_0=\psi_0=\frac{1}{l}\int_0^l \psi_(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$
$$\frac{\pi a}{l}B_1+\frac{A\omega}{\frac{\pi^2a^2}{l^2}-\omega^2}=\psi_1(x)=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$
$$B_n=\frac{l}{n\pi a}\psi_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi$$

8.2.2. 冲量定理法

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u(x=0)=0,u(x=t)=0\\ u(t=0)=\varphi(x),u_t(t=0)=\psi(x)\end{cases}$$

适用于齐次边界条件和零初始条件。如果是非初始条件，用叠加定理解决。

8.3. 非齐次的边界条件

方法一：利用叠加原理，用满足非齐次边界条件的已知函数作为解的一部分。齐次化。

- **例 1**

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u(x=0)=\mu(t),u(x=t)=\nu(t)\\ u(t=0)=\varphi(x),u_t(t=0)=\psi(x)\end{cases}$$

如果设 $u=v+w$，其中 $v|_{x=0}=\mu(t),v_{x=l}=\nu(t)$ ，那么有

$$w|_{x=0}=0,$$
$$w|_{x=l}=0.$$

进一步地，如果 v 已知，则待求的 w 就是齐次边界条件限定下的定解问题。最简单的，设

$$v(t)=\mu(t)+\frac{\nu(t)-\mu(t)}{l}x$$

于是 w 的问题如下

$$
\begin{cases}
w_{tt}-a^2w_{xx}=(u_{tt}-a^2u_{xx})-(v_{tt}-a^2v_{xx})=f(x,t)-\mu''(t)-\dfrac{\nu''(t)-\mu''(t)}{l}x \\
=g(x,t) \\
w(x=0)=w(x=l)=0, \\
w(t=0)=(u-v)|_{t=0}=\varphi(x)-\mu(0)-\dfrac{\nu(0)-\mu(0)}{l}x=\Phi(x) \\
w|_{t=0}=u_t|_{t=0}-v_t|_{t=0}=\psi(x)-\mu'(0)-\dfrac{\nu'(0)-\mu'(0)}{l}x=\Psi(x)
\end{cases}
$$

讨论：当 $f(x,t)=0$，方程是齐次的，经过边界条件齐次化，$w=u-v$ 变成非齐次方程，有时候根据实际问题，可做特殊的齐次化处理。

- **例 2** 弦振动，非齐次边界条件+齐次方程

  $$
  \begin{cases}
  u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \\
  u(x=0)=0, u(x=l)=A\sin\omega t, \\
  u(t=0)=u_t(t=0)=0.
  \end{cases}
  $$

  解: 设 $u=v+w$，那么由求 v 公式，得到

  $$
  \begin{cases}
  v=-\dfrac{A\sin\omega t}{l}x, \\
  v(x=0)=0, \\
  v(x=l)=A\sin\omega t.
  \end{cases}
  $$

  而 w 的求解此时变成了

  $$
  \begin{cases}
  w_{tt}-a^2w_{xx}=\dfrac{A\omega^2\sin\omega t}{l}, \\
  w|_{x=0}=w|_{x=l}=0.
  \end{cases}
  $$

  方程又变成了非齐次的。使问题变得复杂了。这促使我们重新寻找合适的 v，以使 w 的方程变为齐次方程。若假设

  $$
  \begin{cases}
  v=X(x)\sin\omega t, \\
  v(x=0)=0, \\
  v(x=l)=A\sin\omega t.
  \end{cases}
  $$

  那么

  $$
  \begin{cases}
  X(0)=0, \\
  X(l)=A.
  \end{cases}
  $$

  这样X 的求解是本征值问题，得

  $$
  X(x)=\frac{A\cos\dfrac{\omega}{a}x}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}
  $$

所以

$$v(x,t)=\frac{A\cos(\omega a/x)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t.$$

此时 w 的定解问题确实化为了齐次方程、齐次边界条件。

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0,\\ w|_{x=0}=w|_{x=l}=0,\\ w|_{t=0}=0, w_t|_{t=0}=-A\omega\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)} \end{cases}$$

分离变数法求解

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

由初始条件

$$\begin{aligned} A_n&=0,\\ B_n&=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l(-A\omega)\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}(x),\\ &=(-1)^n\frac{2A\omega}{al}\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2l^2}. \end{aligned}$$

所以 $u=v+w=\ldots$

8.4. Poisson 方程

9. 二阶常微分方程技术解法 本征值问题

9.1. 特殊函数常微分方程

9.1.1. Laplace 方程 $\nabla^2u=0$

9.1.1.1. 球坐标系

直角坐标系中

$$\nabla^2=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}$$

在球坐标系中 $u=u(r,\theta,\varphi/\alpha))$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial^2\varphi}=0$$

然后分离变数，分离 θ,φ

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\cdot\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$$

代入方程，得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r})=-\frac{1}{\mathrm{Y}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta})-\frac{1}{\mathrm{Y}}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}=l(l+1)$$

分解为两个方程：极径分量式，是Euler 型方程 （代换 $r=e^t$ 化为二阶常系数常微分方程）和球函数（Spherical function）方程

$$\begin{cases}r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-l(l+1)=0,\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta})+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\mathrm{Y}=0\end{cases}$$

第一式的解为

$$R(r)=Cr^l+D\frac{1}{r^{l+1}}.$$

第二式进一步分离变数 $\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，代入方程得

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\lambda$$

分解为两个方程

$$\Phi''+\lambda\Phi''=0,$$
$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+[l(l+1)\sin^2\theta-\lambda]\Theta=0$$

方位角分量式：由自然地周期条件，得到

$$\lambda=m^2$$

本征函数

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi$$

天顶角分量式：通常做代换 $x=\cos\theta$，**得到 l 阶 Associated Legendre 方程。**

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]\Theta=0$$

叫作 l 阶勒让德方程.
勒让德方程和连带勒让德方程往往隐含着在 $x=\pm1$ *(*即$\theta=0,\pi$)的“自

然边界条件”并构成本征值问题，决定了 l 只能取整数值.

$$
\begin{aligned}
&\rho S dx - YSu_{xx}dx = F(x,t), \\
\Rightarrow & u_{tt} - \frac{YS}{\rho S}u_{xx} = \frac{F(x,t)}{\rho S dx} = f_0 \sin\frac{\omega t}{\rho S}
\end{aligned}
$$

9.1.1.2. 柱坐标系

Laplace 和 Hemhlotz 方程在球坐标系、柱坐标系下采用分离变数法求解——转化成求解特殊函数的二阶微分方程的求解，包括 Legendre 方程（连带 Legendre 方程）、Bessel 方程（虚宗量的 Bessel 方程），以及本征值的确定。

9.1.1.3. 直角坐标系

$$
\nabla^2 u = 0 \text{或} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
$$

设

$$
u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)
$$

代入方程得

$$
\begin{aligned}
YZ\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x} &= -XZ\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x} - XY\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}x} \\
\rightarrow \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}x} = -k_x^2
\end{aligned}
$$

其中，$-k_x^2$ 常数，由此得

$$
\begin{aligned}
X'' + k_x^2 X = 0, \\
Y'' + k_y^2 Y = 0, \\
Z'' - (k_x^2 + k_y^2) Z = 0
\end{aligned}
$$

如果存在 x 及 y 的齐次边界条件，则可以确定本征值 k_x^2, k_y^2 ，从而解得

$$
\begin{aligned}
X(x) &= \begin{cases} A_0 + B_0 x & (k_x = 0) \\ A\cos k_x x + B\sin k_x x & \left(k_x^2 > 0\right) \end{cases} \\
Y(y) &= \begin{cases} C_0 + D_0 y & (k_y = 0) \\ C\cos k_y y + D\sin k_y y & \left(k_y^2 > 0\right) \end{cases}, \\
Z(z) &= \begin{cases} E + Fz & (k_x = k_y = 0) \\ Ee^{\sqrt{k_x^2+k_y^2}z} + Fe^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}z} & (k_x, k_y \text{ 不同为零或不为零 }) \end{cases}
\end{aligned}
$$

或

$$Z(z)=\begin{cases}E+Fz & (k_x=k_y=0)\\ E\cosh\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}z\right)+F\sinh\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}z\right) & (k_x,k_y\text{ 不同为零或不为零 })\end{cases}$$

方程的通解可表为

$$\begin{aligned}u(x,y,z)=&X(x)Y(y)Z(z)\\=&(A_0+B_0x)\left(C_0+D_0x\right)\left(E_0+F_0x\right)+\sum_{k_x,k_y}\left(A\cos k_xx+B\sin k_xx\right)\times\\&\left(C\cos k_yy+D\sin k_yy\right)\left[E\cosh\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}z\right)+F\sinh\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}z\right)\right]\end{aligned}$$

式中, $A_0,B_0,C_0,D_0,E_0,F_0,A,B,C,D,E,F$ 均为待定常数。

9.2. 常点邻域上的级数解法

以上的线性二阶常微分方程一般表示为

$$\begin{gathered}y''+p(x)y'+q(x)y=0,\\y(x_0)=C_0,\quad y'(x_0)=C_1.\end{gathered}$$

很难解。
级数解法： 在某个指定点 x_0 的邻域上，把待求的解表示为系数的待定级数，代入方程以逐个确定系数。
扩展到复数域
不失一般性, 我们讨论复变函数 $w(z)$ 的线性二阶常微分方程

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0,\\w\left(z_0\right)=C_0,w'\left(z_0\right)=C_1.\end{gathered}$$

其中 z 为复变数, z_0 为选定的点, C_0、C_1 为复常数.

9.2.1. 方程的常点和奇点

如果方程的系数函数 $p(z),q(z)$ 在 z_0 的邻域中是解析的，则 $z=z_0$ 叫做方程的常点；反之，若是其中至少一个系数函数的奇点，则称为方程的奇点。

9.2.2. 常点邻域上的级数解

定理： 若方程的系数函数是**常点** z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 中的解析函数，则方程在这圆中存在唯一的解析解 $w(z)$ ，且满足初始条件 $w\left(z_0\right)=C_0,w'\left(z_0\right)=C_1$ ，其中 C_0,C_1 是任意给定的复常数，这解可表示为

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

其中系数 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ 待定。

9.2.3. legendre 方程 自然边界条件

9.2.3.1. Legendre 方程的（Taylor）级数解

连带 Legendre 方程：球坐标系下Laplace方程和 Hemholtz 方程中关于 $\Theta(\theta)$，当 $m=0$ ，亦即 $u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta)$ ，

$$(1-x^2)y''-2xy+l(l+1)y=0$$

$x=\cos\theta, \theta\in(0,\pi), x\in(-1,1).$
即在对称点 $x_0=0$ 的邻域上求解 l 阶 Legendre 方程

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{l(l+1)}{1-x^2}y=0$$

所以可以设

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

把其带入方程，并令系数等于 0，得到递推公式

$$\begin{aligned} a_{k+2}&=\frac{(k^2+k-l(l+1))}{(k+2)(k+1)}a_k \\ &=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \end{aligned}$$

所以 l 阶 Legendre 方程的解是

$$y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$$

其中 y_0 是关于 x 的偶次幂 (x_{2k}) 的无穷级数，y_1 是关于 x 的奇次幂 (x_{2k+1})的无穷级数，分别由递推公式化为用 a_0 和 a_1 的表达，这样只有两个独立的系数 a_0, a_1，由

$$\begin{aligned} y(0)&=C_0, \\ y'(0)&=C_1. \end{aligned}$$

确定。

还需要确定级数的收敛半径，代入递推公式，收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+2}}\right|=1,\text{即}x\in(-1,1)$$

恰好是 x 的取值范围。

9.2.3.2. 级数解在 $x=\pm1$ 是否收敛

在这两点级数发散。但是，实际物理问题中，常需要 u 在一切方向保持有限，相应地就要求 Legendre 方程在包含端点处保持有限，或者在端点处 $x=\pm 1$ 也收敛。这矛盾需要用截断级数为多项式来解决，截断即是对 l 提出了限制。

9.2.3.3. 级数退为多项式

观察递推公式

$$a_{k+2}=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

- 如果 $l=2m$， 则当 $k=2m$, $a_{2m+2}=0$ 且后面所有项均变为 0.此时选 $a_1=0$ 。则无穷级数退化为

  $$y(x)=a_0y_0(x)$$

- 如果 $l=2m+1$， 则当 $k=2m$, $a_{2m+2}=0$ 且后面所有项均变为 0. 此时选 $a_1=0$ 。则无穷级数退化为

  $$y(x)=a_1y_1(x)$$

  综上，只要限定 $l=$ 正整数，一定可以在 $|x|\leqslant 1$ 上找到有限解。如此，**“$y(x)$ 在各个方向、在 $|x|\leqslant 1$ 上均存在有限解”** 的要求成为对 l 的限定条件

  $$\text{自然边界条件}:l\text{只能是0或者正整数.}$$

所以，Legendre 方程与自然边界条件构成本征值问题，本征值是

$$l(l+1),l\in N,$$

对于解$y=a_0y_0(x)$ 或者 $y_1=a_1y_1(x)$ ，取特殊的 a_0 或者 a_1 ,其解表示为

$$y=C_la_0y_0(x)\text{或}y=D_la_1y_1(x)$$

则 $a_0y_0(x)$ 和 $a_1y_1(x)$ 为两个特殊的多项式，成为 Legendre 多项式（Legendre 函数），记为 $P_l(x)$ 或者 $P_l(\cos x)$ ，常见的 $P_l(x)$ 是

$$P_0(\cos\theta)=1,P_1(\cos\theta)=\cos\theta.$$

9.3. 正则奇点邻域上的级数解法

9.3.1. 奇点邻域上的级数解

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0$$

奇点：$p(z)$ 和/或 $q(z)$ 在选定的点 z_0 的邻域中是解析的，则点z_0 是方程的常点。
常点：如果选定的点 z_0 是 $p(z)$ 或 $q(z)$ 的奇点，则点 z_0 叫做方程的奇点。
如果选定的点 z_0 是方程的奇点，则**解也以 z_0 为奇点，在点 z_0 邻域上的展开式含有负幂次项，是**

Laurent 级数。

定理

$$
\begin{aligned}
&\text{若}z_0\text{是方程的奇点，则在邻域}0<|z-z_0|<R\text{上，}\\
&\text{方程存在两个线性独立的解，形式为}\\
w_1(z) &= \\
w_2(z) &=
\end{aligned}
$$

9.3.2. 正则奇点邻域上的级数解

如果在方程的奇点 z_0 的邻域上，两个线性独立解全都具有有限个负幂项，则奇点 z_0 成为方程的**正则奇点**。

Fuchs 定理

Bessel 方程为什么不退化成多项式？因为收敛半径是 $R=\infty$ 。

第九章基本不考，只靠一个选择题，把关键的定义、分类记住即可。